確率微分方程式とその近似方程式における平均絶滅待ち時間について (第8回生物数学の理論とその応用)

佐藤, 一憲

数理解析研究所講究録
第 1796 巻 2012 年 70-71

確率微分方程式とその近似方程式における平均絶滅待ち時間について

Mean exit time for stochastic differential equation and its approximate equation

佐藤一憲
静岡大学工学部システム工学科

Kazunori Sato
Department of Systems Engineering, Faculty of Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu 432-8561 JAPAN
sato@sys.eng.shizuoka.ac.jp

生物集団が絶滅するまでに要する時間の平均値（平均絶滅待ち時間）は，生物集団の絶滅を数値的に評価するためのもっとも代表的な指標のひとつである．そして，生物集団のダイナミクスは常微分方程式モデルとして記述されることが多いために，平均絶滅待ち時間もそのようなモデルに対して評価されることが多い．

Allen and Allen (2003) や Allen *et al.* (2005) では，出生死亡過程と確率微分方程式を対応づけたときの，平均絶滅待ち時間の比較をおこなっている．ここでは，彼らとは異なるモデルを用いて，同じような比較をおこなうことを考える．

標準的な確率微分方程式のテキストに必ず出てくるモデルとして，ロジスティック方程式にホワイトノイズの項を加えた（伊藤型）確率微分方程式

$$dX = rX\left(1-\frac{X}{K}\right)dt + \sigma X dW(t) \tag{1}$$

がある．ここで，X は集団の大きさを，W は標準ウィナー過程を，それぞれ表す．これは，環境変動に起因する確率性だけを考慮したものであり，生物集団の一般的な数理モデルとしては，人口学的確率性も同時に考える必要がある．たとえば，Hakoyama and Iwasa (2000) の考えたモデルは

$$dX = \left[rX\left(1-\frac{X}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_e^2 X\right]dt + \sqrt{\sigma_e^2 X^2 + X}\,dW(t) \tag{2}$$

である．

さて，一般的に，確率微分方程式

$$dX = M(X)dt + \sqrt{V(X)}\,dW(t) \tag{3}$$

に対して，平均絶滅待ち時間は，初期個体数 x_0 の関数として

$$T(x_0) = \int_0^{x_0}\int_z^{\infty} \exp\left(\int_z^y \frac{2M(x)}{V(x)}dx\right)\frac{2}{V(y)}dydz \tag{4}$$

のように与えられる（Goel and Richter-Dyn 1974）．

一方，出生死亡過程

$$\mathrm{Prob}\{X(t+\Delta t)=x|X(t)=y\} = \begin{cases} b(x)\Delta t + o(\Delta t) & y=x-1 \\ d(x)\Delta t + o(\Delta t) & y=x+1 \\ 1-[b(x)+d(x)]\Delta t + o(\Delta t) & y=x \\ o(\Delta t) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

を，確率微分方程式

$$dX = [b(X)-d(X)]dt + \sqrt{b(X)+d(X)}\,dW(t) \tag{6}$$

と対応づけて考える (Bailey 1964). 出生死亡過程 (5) に対しては, 平均絶滅待ち時間は

$$\tau_x = \begin{cases} \dfrac{1}{d(1)} + \displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \dfrac{b(1)\cdots b(i-1)}{d(1)\cdots d(i)} & x = 1 \\ \tau_1 + \displaystyle\sum_{s=1}^{x-1} \left[\dfrac{d(1)\cdots d(s)}{b(1)\cdots b(s)} \sum_{i=s+1}^{\infty} \dfrac{b(1)\cdots b(i-1)}{d(1)\cdots d(i)} \right] & x = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{7}$$

で与えられる (Karlin 1966). ただし, τ_x は初期個体数が x の場合の平均絶滅待ち時間である.

これらのことを踏まえて, モデル (2) に対して, もともとの確率微分方程式の厳密解 (4), オイラー・丸山スキームによる数値解, 対応する出生死亡過程 (6) の厳密解 (7) の比較をおこなった結果, ほぼ似たような値が得られた. 一方, モデル (1) に対して同様の比較をおこなうと, 厳密解は発散するのに, 対応する出生死亡過程はかなり小さい値を与えたり, オイラー・丸山スキームでは時間ステップ幅を小さくするにつれて急激に大きな値を取ることがわかった.

参考文献

Allen, L.J.S. and Allen, E.J. (2003). A comparison of three different stochastic population models with regard to persistence time. *Theor. Popul. Biol.* **64:** 439–449.

Allen, E.J., Allen, L.J.S. and Schurz, H. (2005). A comparison of persistence-time estimation fordiscrete and continuous population models that include demographic and environmental viability. *Math. Biosci.* **196:** 14–38.

Bailey, N.T.J. (1964). "The Elements of Stochastic Processes." John Wiley & Sons.

Geol, N.S. and Richter-Dyn, N. (1974). "Stochastic Models in Biology." Academic Press.

Hakoyama, H. and Iwasa, Y. (2000). Extinction risk of a density-dependent population estimated from a time series of population size. *J. theor. Biol.* **204:** 337–359.

Karlin, S. (1966). "A First Course in Stochastic Processes." Academic Press.